

БР $\frac{129}{128}$

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

О.Я.Савченко

АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ
ПРИ ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

г.Новосибирск

1965

А Н Н О Т А Ц И Я

Найдено, что амплитуды рассеяния состояний, которые является суммой и разностью состояний со спинами $+I$ и $-I$, направленными по оси Z , имеют взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии \vec{X} и \vec{Y} . Эти состояния названы плоскополяризованными по \vec{X} и \vec{Y} . Понятие плоской поляризации обобщено на любое направление. Найдена амплитуда рассеяния и дифференциальное сечение рассеяния при произвольном направлении вектора плоской поляризации системы.

СССР
В. И. Волков

1890-67

Электрон-электронное рассеяние в С.Ц.М. с точностью до членов порядка d^2 описывается в обозначениях [1] уравнением [2]:

$$[E(\gamma_4^{(1)} + \gamma_4^{(2)}) + ic\vec{p}(\vec{\gamma}^{(1)} + \vec{\gamma}^{(2)}) - 2mc^2]\psi = \frac{e^2}{z} (\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)} - \vec{\gamma}^{(1)}\vec{\gamma}^{(2)})\psi, \quad (1)$$

общее решение которого с той же точностью определяется при $z \rightarrow \infty$, выражением:

$$\psi = [\exp i(\vec{K}\vec{z}) + \frac{\exp ikz}{z} VL(\vec{K}_z)(\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)} - \vec{\gamma}^{(1)}\vec{\gamma}^{(2)})L(\vec{K})S(\gamma_{31}^{(1,2)})\Gamma], \quad (2.1)$$

$$L(\vec{K}) = [2E_0^2 - E^2(1 - \gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}) + \frac{1}{2}R\vec{K}(\vec{\gamma}^{(1)} + \vec{\gamma}^{(2)})R + 2E_0(k^2 - \vec{K}\vec{\gamma}^{(1)}\vec{K}\vec{\gamma}^{(2)})], \quad R = 2E_0 + E_\lambda(\gamma_4^{(1)} + \gamma_4^{(2)}), \quad (2.2)$$

$$E_0 = mc^2, \quad K = \pm \frac{1}{\hbar c} \sqrt{E^2 - E_0^2}, \quad \Gamma = (1 + i\gamma_{12}^{(1)})(1 + i\gamma_{12}^{(2)})(1 + \gamma_4^{(1)})(1 + \gamma_4^{(2)}),$$

$$V(\vec{K}) = -\frac{e^2}{8(\hbar mc^3)(k^2 - K^2)}, \quad \vec{K}_z = K\frac{\vec{z}}{z}. \quad (2.3)$$

Следовательно, амплитуда рассеяния

$$f = VL(\vec{K}_z)(\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)} - \vec{\gamma}^{(1)}\vec{\gamma}^{(2)})L(\vec{K})S_i\Gamma. \quad (3)$$

Зависимость амплитуды рассеяния от направляющих углов d_x, d_y, d_z определяется видом гиперкомплексного коэффициента S_i , который характеризует спиновое состояние системы [3, 4]. Следует, например, ожидать, что амплитуды рассеяния суммы и разности двух спиновых состояний со спинами $+1$ и -1 вдоль оси Z , будут, по аналогии с электромагнитным излучением, обладать плоскостями симметрии. Явный вид коэффициентов S_i для этих состояний соот-

ветственно следующий:

$$S_x = 1 + \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)}, \quad S_y = i(1 - \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)}) \quad (4)$$

Подстановка (4) в (3) после несложных вычислений дает следующий результат: с точностью до постоянного множителя

$$f_x = VL(\vec{K}_2) [(E_\lambda^2 + (\vec{K}\vec{K}_2) - K^2 \cos \alpha_x) S_x + \frac{E_\lambda}{E_\lambda + E_{e\lambda}} \cos \alpha_x K \vec{K}_2^{(2)}] \Gamma, \quad (5.1)$$

$$f_y = VL(\vec{K}_2) [(E_\lambda^2 + (\vec{K}\vec{K}_2) - K^2 \cos \alpha_y) S_y + \frac{E_\lambda}{E_\lambda + E_{e\lambda}} \cos \alpha_y K \vec{K}_2^{(2)}] \Gamma, \quad (5.2)$$

$$\vec{a}^{(0)} = a_x S_x + a_y S_y + a_z S_z, \quad S_z = \gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)}, \quad E_\lambda = \frac{E}{\hbar c} \quad (5.3)$$

Таким образом это предположение подтверждается: амплитуда рассеяния в случае сумм спиновых состояний симметрична относительно плоскости \vec{X} , в случае разности состояний - симметрично относительно плоскости \vec{Y} .

В общем случае невозмущенная волновая функция двух электронов включает в себя еще два спиновых коэффициента - S_2

и

$$S_0 = \gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)}. \quad (6)$$

Амплитуды рассеяния каждого из этих состояний имеет следующий вид:

$$f_z = VL(\vec{K}_2) [(E_\lambda E_\lambda + (\vec{K}\vec{K}_2) - K^2 \cos \alpha_z) S_z + (2 - \frac{E_\lambda}{E_\lambda + E_{e\lambda}} \cos \alpha_z + \frac{4}{(E_\lambda + E_{e\lambda})^2} (K\vec{K}_2) K \vec{K}_2^{(2)})] \Gamma, \quad (7.1)$$

$$f_0 = VL(\vec{K}_2) (E_\lambda^2 + K^2) S_0 \Gamma, \quad (7.2)$$

а амплитуда рассеяния суперпозиции всех этих состояний

$$\Psi = \exp i k z \cdot L(\vec{k}) (\vec{a}^{(0)} + b S_0) \Gamma \quad (8)$$

следующая:

$$f = V \cdot L(\vec{k}) (\vec{c}^{(0)} + d^{(0)}) \Gamma, \quad d^{(0)} = b (E_A^2 + k^2) S_0 \quad (9)$$

$$\vec{c}^{(0)} = [E_A^2 + (\vec{k} \vec{k}_z)] \vec{a}^{(0)} - [(\vec{k}_z + \frac{E_A}{E_A + E_{\vec{k}}} \vec{k}) \cdot \vec{a}] \vec{k}_z + [2\vec{k} + (\frac{\vec{k} \vec{k}_z}{E_A + E_{\vec{k}}}) \vec{k} - \frac{E_A}{E_A + E_{\vec{k}}} \vec{k}_z] \vec{a} \vec{k}_z$$

Дифференциальное сечение рассеяния антисимметричной формы состояния (8) определяется равенством:

$$B = \frac{1}{a^2 + b^2} \{ V_+^2 (\vec{c}_+^2 + d^2) + V_-^2 (\vec{c}_-^2 + d^2) - 2 V_+ V_- [(\vec{c}_+ \vec{c}_-) - d^2] \} \quad (10)$$

$$V_{\pm} = V(\pm \vec{k}), \quad \vec{c}_{\pm} = \vec{c}(\pm \vec{k}), \quad d = b(E_A^2 + k^2).$$

Из (9), (10) следует, что триплетное состояние удобно характеризовать вектором $\vec{a}^{(0)}$, который можно назвать вектором плоской поляризации системы.

Интересно отметить, что усреднение B по направлениям поляризации $\vec{k}, \vec{n}_x \vec{k}, \vec{n}_y \vec{k}$ и усреднение B по всем направлениям поляризации дает одинаковый результат - формулу Мюллера

[4] .

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

Частное решение уравнения

$$[E(\gamma_4^{(1)} + \gamma_4^{(2)}) + c\vec{p}(\vec{j}^{(1)} + \vec{j}^{(2)}) - 2mc^2]\Psi = U(\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)} - \vec{j}^{(1)}\vec{j}^{(2)})\Psi \quad (1)$$

находится методом последовательного приближения . Нулевое приближение

$$\Psi_0 = \exp i(\vec{k}\vec{r})L(\vec{k}), \quad (2)$$

а первое приближение определяется уравнением:

$$[E(\gamma_4^{(1)} + \gamma_4^{(2)}) + c\vec{p}(\vec{j}^{(1)} + \vec{j}^{(2)}) - 2mc^2]\Psi_1 = U(\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)} - \vec{j}^{(1)}\vec{j}^{(2)})\Psi_0 \quad (3)$$

Подстановка

$$\Psi_1 = \{2mc^2 - E^2(1 - \gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}) + \frac{1}{2}c\vec{p}(\vec{j}^{(1)} + \vec{j}^{(2)})\} [2mc^2 + E(\gamma_4^{(1)} + \gamma_4^{(2)}) + 2mc^2(\hbar\Delta + \vec{p}\vec{j}^{(1)} + \vec{p}\vec{j}^{(2)})] \eta \quad (4)$$

переводит (3) в следующее уравнение:

$$(\hbar mc^2)^2 (\Delta + k^2) \eta = -U(\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)} - \vec{j}^{(1)}\vec{j}^{(2)})\Psi_0. \quad (5)$$

Следовательно при $r \rightarrow \infty$

$$\Psi_1 = \frac{\exp i k r}{r} \left[\frac{1}{4\pi(\hbar mc^2)^2} \int U \exp i(\vec{k} - \vec{k}_0)\vec{r} d\vec{r} \right] L(\vec{k}_0)(\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)} - \vec{j}^{(1)}\vec{j}^{(2)})L(\vec{k}). \quad (6)$$

Общее решение (1) получается умножением выражения (6) на гиперкомплексный множитель типа /5/

$$\Gamma_{\text{об}} = a_0 + \sum_{\Delta, \beta} (a_{\Delta, \beta}^{(1)} \Gamma_{\Delta, \beta}^{(1)} + a_{\Delta, \beta}^{(2)} \Gamma_{\Delta, \beta}^{(2)}) + \sum_{\Delta, \beta} (a_{\Delta, \beta}^{(3)} \Gamma_{\Delta, \beta}^{(3)} + a_{\Delta, \beta}^{(4)} \Gamma_{\Delta, \beta}^{(4)}) + \sum_{\Delta, \beta} a_{\Delta, \beta}^{(5)} \Gamma_{\Delta, \beta}^{(5)} + \dots + a_{\Delta, \beta}^{(n)} \Gamma_{\Delta, \beta}^{(n)}, \quad (7)$$

который в общем случае имеет 256 компонент.

Сумму (7) можно разбить на 16 слагаемых, каждый из которых справа имеет множитель типа

$$\Gamma = (1 \pm i\gamma_{12}^{(1)}) (1 \pm i\gamma_{12}^{(2)}) (1 \pm \gamma_4^{(1)}) (1 \pm \gamma_4^{(2)}) \quad (8)$$

а слева множитель

$$S = F(\gamma_3^{(1)}, \gamma_3^{(2)}, \gamma_{31}^{(1)}, \gamma_{31}^{(2)}), \quad (9)$$

который в свою очередь удобно разбить на следующие 16 компонент, приведенных в таблице I.

Таблица I

Симметричные компоненты	Антисимметричные компоненты
$S_a = (\gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)}) (\gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)})$	$S_e = (\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(2)}) (\gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)})$
$S_{bx} = (1 - \gamma_3^{(1)} \gamma_3^{(2)}) (1 - \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)})$	$S_m = (1 - \gamma_3^{(1)} \gamma_3^{(2)}) (\gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)})$
$S_{by} = i(1 - \gamma_3^{(1)} \gamma_3^{(2)}) (1 + \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)})$	$S_n = (1 + \gamma_3^{(1)} \gamma_3^{(2)}) (\gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)})$
$S_{bz} = (1 + \gamma_3^{(1)} \gamma_3^{(2)}) (\gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)})$	$S_{kx} = (\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(2)}) (1 + \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)})$
$S_{cx} = (1 + \gamma_3^{(1)} \gamma_3^{(2)}) (1 - \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)})$	$S_{ky} = (\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(2)}) (1 - \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)})$
$S_{cy} = i(1 + \gamma_3^{(1)} \gamma_3^{(2)}) (1 + \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)})$	$S_{kz} = (\gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)}) (\gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)})$
$S_{cz} = (i - \gamma_3^{(1)} \gamma_3^{(2)}) (\gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)})$	
$S_{dx} = -i(\gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)}) (1 + \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)})$	
$S_{dy} = (\gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)}) (1 - \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{31}^{(2)})$	
$S_{dz} = i(\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(2)}) (\gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)})$	

Для анализа процесса рассеяния достаточно использовать гиперкомплексный множитель $\Gamma_{об}$, который включает в себя только одно из 16 слагаемых, например

$$\Gamma_{об} = S\Gamma_+, \quad \Gamma_+ = (1 + i\gamma_{12}^{(m)})(1 + i\gamma_{13}^{(m)})(1 + \gamma_4^{(m)})(1 + \gamma_4^{(m)}), \quad (10)$$

так как действие на (10), любого оператора \hat{A} , включающего в себя гиперкомплексные числа, не меняет класса числа (10):

$$\hat{A}S\Gamma_+ = S'\Gamma_+. \quad (11)$$

Именно поэтому в таблицу II внесены результаты действия наиболее важных операторов только на ортогональные компоненты чисел класса (10)

Таблица (II)

Компоненты	Тип оператора			
	$\gamma_4^{(m)} - \gamma_4^{(m)}$	$\vec{k} \cdot (\vec{\gamma}^{(m)} + \vec{\gamma}^{(m)})$	$\frac{1}{E_{0\lambda}} L(\vec{k})$	$\epsilon \cdot \epsilon^*$
a_a	$-4a_a$	$2a\vec{k}_b$	$(iE_{0\lambda}\vec{k}_b + iE_{\lambda}\vec{k}_c - k_a^2)a$	$-a^2$
\vec{a}_b	$2\vec{a}_b$	$2(\vec{k}\vec{a})_a$	$E_{\lambda}^2\vec{a}_b + E_{\lambda}E_{0\lambda}\vec{a}_c - (\vec{k}\vec{a})_b\vec{k}_c + iE_{0\lambda}(\vec{k}\vec{a})_a - iE_{\lambda}(\vec{k}\vec{a})_d$	\vec{a}^2
\vec{a}_c	0	$-2(\vec{k}\vec{a})_d$	$E_{\lambda}^2\vec{a}_c + E_{\lambda}E_{0\lambda}\vec{a}_b + [\vec{k}\vec{a}]_c - iE_{0\lambda}(\vec{k}\vec{a})_d + iE_{\lambda}(\vec{k}\vec{a})_a$	\vec{a}^2
\vec{a}_d	$-2\vec{a}_d$	$2(\vec{k}\vec{a})_c$	$iE_{0\lambda}(\vec{k}\vec{a})_c + iE_{\lambda}(\vec{k}\vec{a})_b + [\vec{k}\vec{a}]_d$	$-\vec{a}^2$
a_e	$2a_e$	0	0	$-a^2$
a_m	$4a_m$	0	$E_{\lambda}^2a_m + E_{\lambda}E_{0\lambda}a_n + iE_{\lambda}a\vec{k}_k$	a^2
a_n	$-2a_n$	$2a\vec{k}_k$	$E_{0\lambda}^2a_n + E_{\lambda}E_{0\lambda}a_m + iE_{0\lambda}a\vec{k}_k$	a^2
\vec{a}_k	0	$2(\vec{k}\vec{a})_n$	$iE_{0\lambda}(\vec{k}\vec{a})_n + iE_{\lambda}(\vec{k}\vec{a})_m - (\vec{k}\vec{a})_k$	$-\vec{a}^2$

В таблице II введены следующие обозначения:

$$\vec{a}_\epsilon = (a_x S_{\epsilon x} + a_y S_{\epsilon y} + a_z S_{\epsilon z}) \Gamma_+, \quad (II)$$

$$a_\epsilon = a S_\epsilon \Gamma_+. \quad (I2)$$

Из таблицы II и (II, I2) следует, что состояния (II) удобно рассматривать как векторы, а остальные компоненты - как скаляры. В такой интерпретации любое физическое состояние двух дираковских частиц можно представить как сумму четырех векторов и четырех скаляров. В частности, система двух свободных частиц описывается волновой функцией типа

$$\Psi_{\epsilon-\epsilon} = L(\vec{k}) (\vec{a}_b^{(v)} + \vec{a}_c^{(v)} + a_m^{(w)} + a_n^{(w)}) \exp i(\vec{k} \vec{z}) = \quad (I3)$$

$$= E_+ (E_+ + E_-) \{ E (a_b^{(v)} + a_c^{(v)}) + i(\vec{k} \cdot \vec{a}_b^{(v)})_d - i[\vec{k} \times \vec{a}_c^{(v)}]_d + E a_m^{(w)} + E_+ a_n^{(w)} + a^{(w)} \vec{k}_k \} \exp i(\vec{k} \vec{z}),$$

если энергии частиц имеют одинаковые знаки, и

$$\Psi_{\epsilon-\rho} = L(k) (\vec{a}_d^{(v)} + \vec{a}_k^{(v)} + a_a^{(w)} + a_t^{(w)}) \exp i(\vec{k} \vec{z}) = E_j \exp i(\vec{k} \vec{z}). \quad (I4)$$

$$\cdot \{ E[\vec{k} \times \vec{a}_b^{(v)}]_d + E_c [\vec{k} \times \vec{a}_c^{(v)}]_d - i[\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{a}_d^{(v)}]]_d + E(\vec{k} \cdot \vec{a}_m^{(w)}) + E_+ (\vec{k} \cdot \vec{a}_n^{(w)}) + i(\vec{k} \cdot \vec{a}_t^{(w)}) \vec{k}_k + (E_+ \vec{k}_k + E \vec{k}_c \cdot \vec{k}_d) a^{(w)} \},$$

если энергии имеют разные знаки.

Таблица III

Комп.	Тип оператора	
	$E_0^{-1} L(\vec{k}^{(0)})$	$E_0^{-2} L(\vec{k}^{(0)}) \gamma_i^m \gamma_i^m L(\vec{k}^{(0)})$
a_n	$L_0(\vec{k}^{(0)}) \cdot i(E_0 \vec{k}_0^m + E \vec{k}_c^m) a,$	$L_0(\vec{k}^{(0)}) \cdot \{E_0 [E^2 \vec{k}^{(0)} + 2k^2 \vec{k}^{(0)} - (\vec{k}^{(0)} \vec{k}^{(0)}) \vec{k}^{(0)}]_c + E(E_0^2 \vec{k}^{(0)} + 2k^2 \vec{k}^{(0)})\} a,$
\vec{a}_c	$\cdot [E^2 \vec{a}_c + E E_0 \vec{a}_c - (\vec{a} \vec{k}^{(0)}) k_c^m],$	$\cdot \{E E_0 [E^2 \vec{a} + (\vec{a} \vec{k}^{(0)}) (2\vec{k}^{(0)} - \vec{k}^{(0)}) - [\vec{k}^{(0)} (\vec{k}^{(0)} \vec{a})]]_c + E^2 [E^2 \vec{a} + (\vec{a} \vec{k}^{(0)}) (2\vec{k}^{(0)} - \vec{k}^{(0)}) - [\vec{k}^{(0)} (\vec{k}^{(0)} \vec{a})] - (\vec{a} \vec{k}^{(0)}) \vec{k}^{(0)}]_c - (2k^2 - k^2 \vec{k}^{(0)}) (\vec{a} \vec{k}^{(0)}) \vec{k}^{(0)}\}$
\vec{a}_d	$\cdot i[E_0 (\vec{k}^{(0)} \vec{a})_c + E_0 (\vec{k}^{(0)} \vec{a})_c],$	$\cdot i\{E [E^2 (\vec{k}^{(0)} \vec{a}) - [\vec{k}^{(0)} (\vec{k}^{(0)} (\vec{k}^{(0)} \vec{a})] - (\vec{k}^{(0)} \vec{k}^{(0)}) \vec{a}]_c + E_0 [E^2 (\vec{k}^{(0)} \vec{a}) - [\vec{k}^{(0)} (\vec{k}^{(0)} (\vec{k}^{(0)} \vec{a})]]_c]\},$
\vec{a}_c	$\cdot [E E_0 a_c + E^2 a_c + (k^{(0)} k^{(0)} a)_c],$	$\cdot \{E E_0 [E^2 \vec{a} + 2(\vec{a} \vec{k}^{(0)}) \vec{k}^{(0)} - (\vec{a} \vec{k}^{(0)}) k^{(0)} - [\vec{k}^{(0)} (\vec{k}^{(0)} \vec{a})]]_c + E_0 [E^2 \vec{a} + 2(\vec{a} \vec{k}^{(0)}) \vec{k}^{(0)} - [\vec{k}^{(0)} (\vec{k}^{(0)} \vec{a})]_c + 2k^2 (\vec{a} \vec{k}^{(0)}) \vec{k}^{(0)}\},$
a_c	$\cdot 0,$	$\cdot 0,$
a_m	$\cdot E(E a_m + E_0 a_n),$	$\cdot E(E^2 + k^2)(E a_m + E_0 a_n),$
a_n	$\cdot E_0(E a_m + E_0 a_n),$	$\cdot E_0(E^2 + k^2)(E a_m + E_0 a_n),$
\vec{a}_k	$\cdot (a k^{(0)})(E a_m + E_0 a_n).$	$\cdot i(E^2 + k^2)(\vec{a} \vec{k}^{(0)})(E a_m + E_0 a_n).$

Однако для расчета процессов упругого рассеяния и тормозного излучения иногда удобнее пользоваться волновой функцией в форме:

$$\Psi = L_0(\vec{k})(\vec{a}_s + \vec{a}_s^* + \alpha_n^* + \alpha_n) \exp i(\vec{k}\vec{z}), \quad L_0(\vec{k}) = 1 - iE_0^{-1} \vec{k} \cdot (\vec{y}^{(n)} + \vec{y}^{(n)}) \quad (15)$$

Поэтому в таблицу III результаты действия операторов на компоненты внесены в форме (15)

Л и т е р а т у р а

1. Г.Бете и Э.Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Физматгиздат, 1960.
2. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИЛ., 1956.
3. А.Зоммерфельд. Строение атома и спектры, т.2 ГИТТЛ, 1956.
4. Фейнман. Квантовая электродинамика, изд.Мир, 1964.
5. Б.В.Богданович, ЭТФ, 7, 210 (1937)

Ответственный за выпуск Савченко О.Я.
Тираж 150 экз.

Отпечатано на роталпринте в Институте
ядерной физики Сибирского отделения
Академии наук СССР.